Diagnose von Schwierigkeiten im Umgang mit Zahlen in unterschiedlichen Repräsentationsformen – Ergebnisse einer Pilotstudie

CHRISTINA IMP, GRAZ

Das Arbeiten mit Zahlen in unterschiedlichen Darstellungen stellt Lernende bis ins Erwachsenenalter vor große Herausforderungen. Um dieses Problem genauer untersuchen zu können, wird ein Instrument zur Diagnose von Fehlvorstellungen von Zahlen in verschiedenen Formen der Darstellung und Notation entwickelt. Dieses Diagnoseinstrument, mit zweistufigen Items, ist für Lernende ab Ende der 6. Schulstufe einsetzbar und basiert auf gängigen Größenvergleichsaufgaben sowie Fehlkonzepten. In diesem Beitrag werden die Ergebnisse der Pilotstudie, an der 90 Lernende zwischen 12 und 15 Jahren teilnahmen, diskutiert und erste Schlüsse für den Unterricht gezogen.

1 Einleitung

Im Alltag sind wir dauerhaft von Zahlen in unterschiedlichen Repräsentationsformen beziehungsweise Darstellungsformen (Zahlensymbol, Text, Bild) umgeben. Zum Beispiel in einem Zeitungsartikel, in dem wichtige Informationen wie Ergebnisse oder Statistiken - einerseits als Bruchzahl, als Zahlwort oder gar als bildliche Darstellung - abgebildet werden. Oft findet man sogar in einem kurzen Absatz Zahlen in unterschiedlichen Notationsformen (Brüche, Dezimalschreibweise oder Prozentform). Die Interpretation dieser Angaben und der Wechsel zwischen den unterschiedlichen Darstellungsformen stellt nicht nur Kinder und Jugendliche, sondern auch Erwachsene vor Herausforderungen (z.B. Schwenk & Berger, 2006). Dabei sind gerade diese Fähigkeiten unumgänglich, um korrekte zahlenbasierte Entscheidungen im Alltag treffen zu können. Gerade weltweite Ereignisse wie die Pandemie zeigen die Notwendigkeit der Beherrschung dieser Fähigkeit wieder einmal mehr auf, da man tagtäglich in den Medien mit Zahlen in unterschiedlichen Darstellungsformen konfrontiert ist und diese interpretieren muss. Interessanterweise gibt es unseres Wissens hierzu jedoch noch wenig bis keine Diagnoseinstrumente, die einen Blick auf diese Fähigkeit und dahintersteckende Strategien zulassen. Daher ist das Ziel dieses Gesamtprojektes die Entwicklung eines Diagnoseinstruments, das genau auf diese Fähigkeit, mit Zahlen in unterschiedlichen Darstellungsformen zu arbeiten, fokussiert. Da ein Verfahren zur Diagnose eines grundlegenden Zahlenverständnisses der Größenvergleich zweier Zahlen ist, wurde diese Methode auch für dieses Instrument gewählt (siehe dafür zum Beispiel De Smedt et al. 2013; Holloway & Ansari 2009; Geller et al. 2017). Weiterführend sollen die Ergebnisse mehr Informationen über zielführende Strategien und bestehendes Grundverständnis von Zahlen in unterschiedlichen Darstellungs- und Notationsformen liefern. In diesem Artikel werden die Ergebnisse der Pilotierung der ersten Version des entwickelten Diagnoseinstruments vorgestellt und ein Blick in verschiedene Lösungsstrategien gegeben. Weiters werden auch Implikationen für den Unterricht angeschnitten.

2 Theoretischer Hintergrund

In den letzten zwei Jahrzehnten gab es gerade in der entwicklungs- und neuropsychologischen Forschung viele Studien zur Verarbeitung und dem Verständnis von Zahlen (siehe beispielsweise De Smedt et al. 2013; Dehaene 2011; Dehaene et a. 2003; Piaget 1952). Ein wichtiger Grundstein hierfür ist der sogenannte „number sense“ oder auch Zahlensinn. Dieser Zahlensinn ist definiert als die Fähigkeit, numerische Größen oder Zahlen darzustellen und nonverbal zu manipulieren (Dehaene 2011). Dieses Zahlengefühl ist eine Fähigkeit, die wir bereits in sehr jungen Jahren (Wynn 1992) als Kleinkinder und in einer Vielzahl von Situationen erlernen; sei es beim Warten auf den Bus, beim Tomatenkauf oder beim Kuchenbacken – hier ist immer ein gewisses „Zahlengefühl“ gefragt. Es hat sich gezeigt, dass die Fähigkeit eines Kindes, Größen zu unterscheiden und zu vergleichen (basisnumerische Fähigkeiten), sowie Aussagen über seine (Rang-)Reihenfolge spätere arithmetische Fähigkeiten vorhersagen können (De Smedt et al. 2013, Holloway & Ansari 2009; Lyons et al. 2014; Nosworthy et al. 2013; Siegler & Ramani

2009; Vogel et al. 2015). Zudem haben Studien gezeigt, dass diese basisnumerischen Fähigkeiten sogar unseren Karriereverlauf beeinflussen können (Duncan et al. 2007; Parsons & Bynner 2005). Ein mathematisches Grundverständnis ist also von großer Bedeutung. In den letzten Jahren haben die Ergebnisse von Studien zur Untersuchung der mathematischen Leistungen von Bachelorstudierenden im Hochschulbereich gezeigt, dass diese zum Teil Defizite in grundlegenden Bereichen (beispielsweise Aufgaben zur Umformung symbolischer Brüche) der Schulmathematik aufweisen (z. B. Schwenk & Berger 2006, Henn & Polaczek 2007, Schott et al. 2007). Überraschenderweise treten diese Defizite hauptsächlich bei Inhaltsbereichen auf, die in den Pflichtlehrplänen der Sekundarstufe I in Österreich (BMBWF 2000) und Deutschland verankert sind, und nicht in Inhaltsbereichen der Sekundarstufe II. Diese Ergebnisse sind nicht nur im Hinblick auf ihren Zusammenhang mit vorzeitigem Studienabbruch in mathematischen und technischen Studienfächern (Cramer & Walcher 2010; Heublein et al. 2005) bedenklich, sie weisen ebenfalls auf eine tiefergehende Problematik des Mathematikunterrichts hin: das oft mangelhafte mathematische Grundwissen bis hinauf ins Erwachsenenalter, das sich auch bei Studierenden zeigt. Die Fähigkeit, zwischen unterschiedlichen Darstellungen wechseln zu können, spielt nicht nur im Kontext des „number sense“, sondern auch in der mathematischen Ausbildung eine entscheidende Rolle. Wenn von Grundwissen und Grundverständnis die Rede ist, so muss auch geklärt werden, was Verstehen im Mathematikunterricht überhaupt bedeutet. Beispielsweise unterscheidet man in einer Definition von Padberg und Wartha (2017) zwischen der Fähigkeit, mit einem bestimmten mathematischen Verfahren oder Inhalt operieren zu können und es zu verstehen. So findet sich nicht nur in der psychologischen Definition des „number sense“ die Relevanz der Fähigkeit zwischen unterschiedlichen Darstellungsformen von Zahlen wechseln zu können, sondern auch in der Mathematikdidaktik. Zieht man hier eine Definition von Padberg und Wartha (2017) von Verstehen in der Mathematik heran, so beschreiben diese es als die Fähigkeit zwischen Darstellungen wechseln zu können. Es wird also zwischen dem Beherrschen und dem Verstehen eines Inhalts unterschieden. Ein Inhalt wird beherrscht, wenn er in der Darstellungsform angewandt oder bearbeitet werden kann, in der er auch repräsentiert wird. Von Verstehen spricht man hingegen erst, so Padberg und Wartha (2017), wenn der Inhalt in unterschiedliche Darstellungsformen flexibel übersetzt und bearbeitet werden kann. In anderen – von ihnen gewählten Worten – „wenn Grundvorstellungen aktiviert werden“ (Padberg & Wartha, 2017, S. 2). Nach Wartha (2007) sind mathematische Grundvorstellungen mentale Modelle, die für die Übersetzungsprozesse zwischen realen Situationen und mathematischen Inhalten grundlegend sind. Damit schließt sich der Kreis mit der bisherigen Definition von Verstehen in der Mathematik wieder: Man muss beispielsweise zwischen dem numerischen Zahlenzeichen und einer figurativen Zahlendarstellung wechseln können. Diese Definition weist also auch darauf hin, dass Darstellungen und der Wechsel zwischen ihnen eine wichtige Rolle spielen. Es muss jedoch nicht nur geklärt werden, was in der Mathematik unter Verstehen, sondern auch unter Darstellungen, verstanden wird. In diesem Artikel werden Darstellungen in Anlehnung an das Translationsmodell von Lesh, Post und Behr (1987) verstanden, die unter „representations“ (hier als Darstellungen bezeichnet) ein Konstrukt aus mehreren Komponenten sehen. Wie in Abbildung 1 abgebildet, werden im Modell von Lesh, Post und Behr (1987) insgesamt fünf große Darstellungsformen angesprochen. In diesem Artikel liegt der Fokus auf drei dieser Formen (Pictures, Verbal Symbols und Written Symbols), wobei die Darstellungsform der „Written Symbols“ von uns noch einmal in die drei Notationsformen (Bruch-, Dezimal-, und Prozentschreibweise) unterteilt wird, um auch dieser Herausforderung gerecht zu werden. Dieses Modell wurde auch aus dem Grund herangezogen, da die Verbindung zum Konzept des Verstehens von Padberg und Wartha (2017) geschlagen werden kann, dass dann ein Inhalt verstanden wird, wenn man fähig ist ihn in unterschiedliche Darstellungs-/Repräsentationsformen zu übersetzen. Zum besseren Verständnis wird daher in diesem Beitrag nur noch der Begriff Darstellungsformen verwendet.

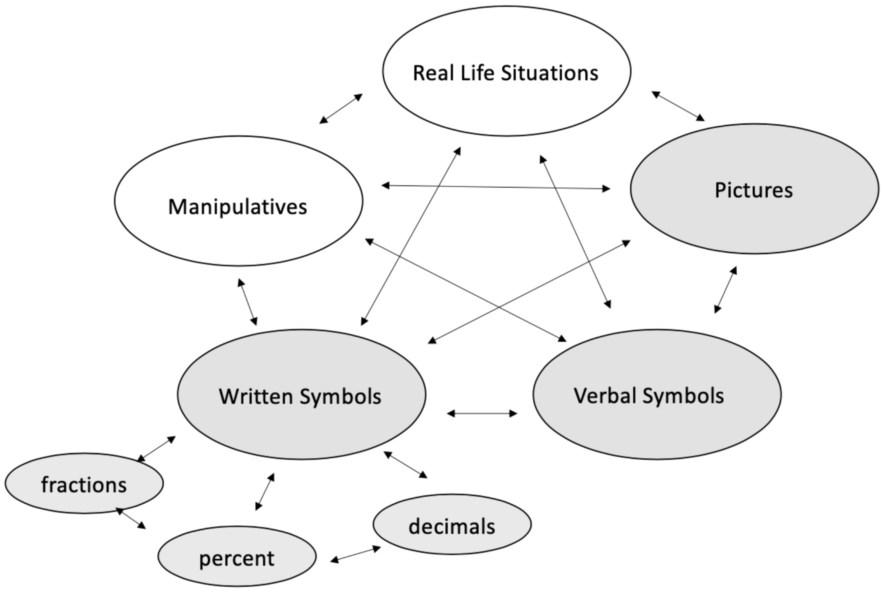

Abb. 1: Abbildung modifiziert nach Lesh, Post und Behr (1987). Modell der Darstellungen in Mathematik mit Ergänzung der drei Modalitäten bei den Written Symbols.

An dieser Stelle muss geklärt werden, was in dieser Studie unter einem Bruch verstanden wird, da in Schulbüchern oft unterschiedlich präzise Definitionen gewählt werden (Wu 2003). In diesem Artikel wird unter einem Bruch ein Paar von natürlichen Zahlen (also Zähler und Nenner), dass die Bruchzahl $\frac{Zähler}{Nenner}$ festlegt. Für Zähler und Nenner werden in diesem Projekt nur natürliche Zahlen in Betracht gezogen, um die zusätzlich kognitiv erschwerende Komponente der negativen Zahlen auszublenden. Diese Bruchzahl ist durch einen Bruch eindeutig bestimmt, kann aber natürlich durch beliebig viele andere Brüche dargestellt werden. Somit kann eine Bruchzahl als Eigenschaft des Zahlenpaares (Zähler und Nenner) aufgefasst werden; ihr „Verhältnis" (Wu 2003). Die zweite für diese Studie relevante Schreibweise ist die der Dezimalzahl. Eine Dezimalzahl (oder auch Dezimalbruch) ist eine Bruchzahl, die durch einen Bruch mit einer Zehnerpotenz im Nenner gegeben ist (Wu 2016). Auch für die Prozentzahl kann eine Definition von Wu herangezogen werden, in der er diese als einen komplexen Bruch mit dem Nenner 100 bezeichnet (2016).

3 Die Pilotstudie

Basierend auf den oben beschriebenen Erkenntnissen ist das Ziel dieses Projekts ein Diagnoseinstrument zu entwickeln. Dieses Instrument soll nicht nur in der Lage sein, einen Status Quo zu diagnostizieren, sondern auch Einblicke in die Zusammenhänge zwischen bestehenden Grundideen und Lösungsstrategien zu ermöglichen. Um ein Diagnosetool zu entwickeln, das Fehlvorstellungen und Lösungsstrategien im Bereich Zahlen in unterschiedlichen Darstellungsformen untersuchen kann, wurden bisherige Erkenntnisse zusammengefasst und in eine erste Version des Diagnoseinstruments eingearbeitet. Im folgenden Abschnitt werden das Diagnosetool und dessen Pilotierung beschrieben.

Der eingeschränkte Einsatzbereich des Diagnoseinstruments auf einen Zeitraum ab dem Ende der zweiten Klasse hat den Grund, dass erst ab diesem Zeitpunkt die Instruktion der relevanten Thematiken abgeschlossen werden kann. Hierbei handelt es sich um Kenntnisse, die die Lernenden über Brüche, aber auch über die Dezimal- und Prozentschreibweise, aufweisen sollten. Laut Lehrplan (BMBWF 2000) werden in der 1. Klasse der Sekundarstufe I die folgenden Kompetenzen in diesem Zusammenhang erworben:

- „anhand von Teilern und Vielfachen Einblicke in Zusammenhänge zwischen natürlichen Zahlen gewinnen;
- Vorstellungen mit positiven rationalen Zahlen verbinden,
- mit der Darstellung in Dezimal- und Bruchschreibweise vertraut sein,
- einfache Ungleichungen zum Einschranken benutzen;
- mit den positiven rationalen Zahlen Rechnungen mit leicht abschätzbaren Ergebnissen durchführen und zur Lösung von Problemen in Sachsituationen vielfältig anwenden können,
- Rechnen mit Brüchen, nur in einfachen Fällen, die anschaulich deutbar sind“

Anschließend folgt dann noch im Laufe der 2. Klasse der Sekundarstufe I der Kompetenzerwerb in folgenden Bereichen (BMBWF 2000):

- „Rechnen mit Brüchen (mit kleinen Zählern und Nennern), damit die Rechenregeln im Hinblick auf die Algebra sicher beherrscht werden,
- diese Rechenregeln für das Bruchrechnen begründen können,
- Bruchdarstellung in Dezimaldarstellung überführen und umgekehrt,
- Rechnen mit Prozenten in vielfältigen Zusammenhängen;“

Doch nicht nur in diesen Bereichen sollten die Lernenden laut Lehrplan am Ende der 6. Schulstufe Kenntnis besitzen, sondern auch der Darstellungswechsel wird (laut Lehrplan) in unterschiedlichen Lernsituationen im Unterricht thematisiert.

Im Zuge einer ersten Itementwicklung wurden zweistufige Items entwickelt. In der ersten Stufe wird die Antwort auf den Größenvergleich erhoben (größer, kleiner oder gleich). In der zweiten Stufe werden neben der gegebenen Antwort auch die Begründung dieser und die verwendeten Strategien in einem offenen Format gesammelt. Die Teilnehmenden wurden also dazu aufgefordert zu beschreiben, wie sie die jeweilige Aufgabe gelöst haben, beziehungsweise ihre Antwort zu begründen. Die Items wurden auf Basis bereits vorhandener Itemformate entwickelt, um eine höhere Validität zu gewährleisten. Zum besseren Verständnis der Struktur werden die Items in den nächsten Abschnitten näher erläutert.

In seiner endgültigen Version wird das Diagnoseinstrument als digitale Version bereitgestellt, in der die Größenvergleichsaufgaben in einem Single-Choice-Format gegeben werden. Die Strategien können in einem zweiten Schritt über Dropdown-Menüs ausgewählt werden. Um die Auswahlmöglichkeiten für die Strategien in der digitalen Version zu entwickeln, wurde das Diagnosetool in der Pilotstudie in einer Papier-Bleistift-Version vorgegeben. Die Antworten wurden in einem offenen Format erhoben. Dies bot die Möglichkeit, schriftliche Antworten sowie Skizzen und Berechnungen festzuhalten. Diese Pilotversion bestand aus 35 Items. Die Items wurden in Gruppen eingeteilt:

- Gruppe 1: Größenvergleich – gleiche Darstellungsform
- Gruppe 2: Größenvergleich – unterschiedliche Darstellungsform im Sinne der Schreibweise (zum Beispiel Bruch- und Dezimalschreibweise)
- Gruppe 3: Größenvergleich – unterschiedliche Darstellungsform (zum Beispiel Kreisdiagram und Dezimalzahl)

"acht von zwölf Personen haben einen Hund"

Abb. 2: Beispiel für ein Item des Diagnoseinstruments. Hier ist die erste Zahl als Text und die zweite als Grafik dargestellt. In der Angabe wurde vorab darauf hingewiesen, dass bei der Grafik jeweils der dunkel gefärbte Teil zu betrachten ist.

Die Gruppen können wiederum in Cluster, in der Pilotstudie in 15 Clustern zu je zwei bis drei Items, eingeteilt werden. So lassen sich beispielweise in Gruppe 1 (Größenvergleich - gleiche Darstellungsform) die Cluster „Bruch mit Bruch“ und „Dezimalzahl mit Dezimalzahl“ identifizieren. Das ermöglicht einen tiefergehenden Einblick in individuelle Lösungsstrategien, nicht nur für die gesamte Aufgabengruppe, sondern auch die der Itemcluster. Die Cluster wurden jedoch nicht nur aus diesem Grund gebildet, sondern basieren auf häufig verwendeten Strategien, die bereits in früheren Studien identifiziert wurden. Zusätzlich war es wichtig für die allgemeine Rechenfähigkeit in diesem Zahlenbereich kontrollieren zu können, was die Aufgaben der Gruppe 1 ermöglichen. Zusätzlich muss hervorgehoben werden, dass sich der Begriff der „unterschiedlichen Darstellung“ von Brüchen nicht auf die rein mathematische Bedeutung von mehreren Darstellungen eines Bruches bezieht, wie zum Beispiel im Fall von $\frac{2}{4}$ und $\frac{1}{2}$. Auf diese Art der Darstellungen wird in diesem Beitrag nicht eingegangen.

3.1 Ablauf der Studie

Alle Teilnehmer:innen erhielten eine Einverständniserklärung, in der die Hauptziele der Studie erläutert wurden, die von den Erziehungsberechtigten unterschrieben retourniert wurde. Allen Schüler:innen wurde das gleiche Testheft ausgehändigt. Die Testungsdauer variierte je nach Schulstufe zwischen 70 (6. Schulstufe) und 30 Minuten (8. Schulstufe). Den Beteiligten wurde das Diagnoseinstrument als Broschüre (Din A5) ausgehändigt. Die Verwendung eines Taschenrechners war nicht erlaubt. Die gesammelten demografischen Daten waren die Schulstufe, das Alter sowie das Geschlecht und wurden zu Beginn der Testung abgefragt. Neben einer mündlichen Anweisung vor der Testung enthielt das Heft vor jedem großen Abschnitt eine kurze Erläuterung in altersgerechter Sprache. Die Items wurden in Clustern (zwei bis drei Items zu einer Gruppe zusammengefasst) vorgegeben und die Lernenden wurden nicht gebeten, ihre Lösungsstrategien nach jedem Item zu beschreiben, sondern nach jedem Cluster. Ein Grund dafür war die Anforderung der Testökonomie, da sich ansonsten die Testzeit verdreifacht hätte. Ein weiterer Grund war, dass die unterschiedlichen Strategieerklärungen nicht benötigt wurden, da jedes Item in einem Cluster die gleiche Strategie hervorrufen sollte.

3.2 Methode

Es war daher schon im Prozess der Itementwicklung sehr wichtig mögliche Lösungsstrategien in Betracht zu ziehen und einfließen zu lassen. Diese werden nun genauer beschrieben, da sie weiters auch die Grundlage für das Kategoriensystem der Qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring 2010) für die Auswertung der Pilotstudie waren. Bei diesen Lösungsstrategien geht es nicht ausschließlich um korrekte Lösungswege, die Schüler:innen verwenden, sondern um Strategien die von Lernenden typischerweise verwendet werden, auch wenn diese fehlerbehaftet sind.

Bekannte Lösungsstrategien

Beim *Benchmarking* (eine Vergleichsgröße wählen) wird eine Zahl, die Benchmark, zwischen den zwei gegebenen Zahlen gewählt. Es müssen nun zwei Größenvergleiche statt einem durchgeführt werden, deshalb muss die Wahl so erfolgen, dass diese zwei Größenvergleiche sehr einfach sind. Die hier am häufigsten verwendeten Zahlen sind $\frac{1}{2}$ oder 1. Man muss also nur feststellen, ob die Zahlen größer oder kleiner als die gewählte Benchmark ist und kann so sehr schnell eine Entscheidung über den Größenvergleich treffen. Zum Beispiel kann man auch nach Definition sagen, dass eine Bruchzahl, deren Zähler größer bzw. kleiner als der Nenner ist, größer bzw. kleiner als 1 ist. Daher kann der Größenvergleich von $\frac{499}{631}$ und $\frac{709}{544}$ leicht durch Wahl von 1 als Benchmark erfolgen: $\frac{499}{631} < 1 < \frac{709}{544}$. Diese Strategie erfordert die Fähigkeit des Kürzens um sinnvoll eingesetzt werden zu können. (Clarke & Roche 2009). Wird diese Strategie beherrscht so können auch schwierig erscheinende Aufgaben sehr schnell gelöst werden (siehe Abb. 3). Die tatsächliche Größe der Zahl muss bei dieser Strategie jedoch nicht verarbeitet werden.

$$\frac{250}{500} \quad \frac{329}{666}$$

Abb. 3: *Item 8 des Diagnosetools, dass die Strategie* Benchmarking *hervorrufen sollet. Die Aufgabe ist das richtige mathematische Zeichen einzusetzen ("<", ">" oder "=").*

Wird die Strategie *Residual Thinkin*g verwendet, so liegt der Fokus nicht darauf, was gegeben ist, sondern darauf was noch fehlt, um zum Beispiel auf ein Ganzes zu ergänzen (siehe als Beispiel Abb. 4). Die Schwierigkeit bei dieser Strategie liegt darin, dass die Anteile, die noch fehlen, verglichen werden müssen und nicht die ursprünglichen, gegebenen Brüche. Somit muss ein Umkehrschluss gezogen werden: der Bruch, dem der kleinere Anteil fehlt, ist insgesamt der größere (Clarke & Roche 2009; Post et al. 1987). Es wird mathematisch gesehen also genutzt, dass $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ genau dann gilt, wenn $1 - \frac{a}{b} < 1 - \frac{c}{d}$.

$$\frac{17}{18} \quad \frac{18}{19}$$

Abb. 4: *Item 5 des Diagnosetools, dass die Strategie R*esidual Thinking *hervorrufen sollet. Die Aufgabe ist das richtige mathematische Zeichen einzusetzen ("<", ">" oder "=").*

Eine weitere Strategie wird *Gap Thinking* genannt. Bei dieser Methode wird der Bruch nicht in seiner Gesamtheit verarbeitet, sondern Nenner und Zähler getrennt betrachtet. Nimmt man zum Beispiel die Brüche $\frac{6}{7}$ und $\frac{8}{9}$, so würde hier die Differenz (*gap*) zwischen 6 und 7 und 8 und 9 berücksichtigt, aber nicht die tatsächliche Größe der angegebenen Anteile (Pearn & Stephens 2004). Diese Strategie ist sehr fehlerbehaftet, kann jedoch erfolgreich angewendet werden, wenn es sich bei den Zahlen um Brüche mit gleichem Nenner oder gleichem Zähler handelt.

Die Antworten der Pilotierung wurden auf Basis eines vorerst deduktiven Kategoriensystems kodiert. Diese deduktiven Kategorien bestehen aus den bereits beschriebenen Strategien *Benchmarking, Gap Thinking* und *Residual Thinking*. Zusätzlich wurden aufgrund der Schülerantworten induktiv weitere Kategorien gebildet:

- *Grafisch* – wenn Lernende über eine Grafik oder Skizze argumentiert haben, oder auch Skizzen oder Markierungen in Abbildungen ins Testheft gezeichnet haben, die augenscheinlich für die Lösung der Aufgabe genutzt wurden.
- *Darstellungswechsel* – diese Strategie wurde dann kategorisiert, wenn die Teilnehmenden eine oder sogar beide Zahlen in eine andere Darstellungsform umgewandelt haben. Dies kann so erfolgt sein, dass sie eine Zahl in die Darstellungsform der anderen Zahl überführt haben, oder gar beide Zahlen in eine weitere Darstellungsform umgewandelt haben. Wird diese Strategie angewandt, so ist meistens als zweiter Schritt eine weitere Lösungsstrategie notwendig, um eine Antwort geben zu können.
- *Wissen* – diese Strategie wurde dann kategorisiert, wenn Lernende Antworten gegeben haben, wie "ich wusste es einfach", „das weiß man einfach" oder ähnliches.
- *Kreuzmultiplikation/Erweitern* – bei dieser Strategie haben Teilnehmende eine Kreuzmultiplikation durchgeführt. Eine weitere Variante war, dass die Teilnehmende die Zahlen erweitert

haben, um sie vergleichen zu können. Bei dieser Strategie handelt es sich um eine Vorgehensweise, die im Unterricht instruiert wird und daher von den Lernenden beherrscht werden sollte.

- *Unsicherheit* – diese Strategie lässt sich besser als Begründung bezeichnen. Hier haben Teilnehmende die Aufgabe zwar gelöst, sie konnten jedoch nicht angeben, wie sie dabei vorgegangen sind und haben dies auch verbalisiert. Dies war dennoch eine gängige Antwort (siehe Tabelle 2) und wurde daher in das Kategoriensystem aufgenommen.
- Für einfachere Aufgaben oder Aufgaben, die den Aufgabenstellungen in Schulbüchern sehr ähnlich sind, verwendeten die Schüler:innen Strategien, die sie in der Schule gelernt haben – (hier als *Rule Thinking* bezeichnet). Wenn beispielsweise der Zähler gleich war, erklärten die Lernenden richtig, dass sie jetzt nur noch den Nenner vergleichen müssen, um ein Ergebnis zu erhalten. Sie verwendeten dabei Sätze, die die Sprache in Schulbüchern widerspiegeln.
- Eine letzte Kategorie wurde hinzugefügt, da sie in den ersten drei Item-Clustern verwendet wurde: *Nennerverständnis*. Diese Strategie wurde codiert, wenn die Schüler:innen eine Antwort gaben, die darauf hindeutete, dass sie oder sie verstanden, was die Idee eines Bruchs und insbesondere eines Nenners war.

3.3 Ergebnisse

Für die Pilotstudie wurde eine Stichprobe von 90 Schüler:innen im Alter von 11 bis 15 Jahren, aus der 6. bis zur 8. Schulstufe, herangezogen (siehe Tabelle 1).

Tab. 1: Die Tabelle zeigt die Stichprobenzusammensetzung dieser Studie. Dargestellt sind die Anzahl der Personen aufgeteilt nach Schulstufe sowie Geschlecht.

	männlich	weiblich	Gesamt
6. Schulstufe	14	29	43
7. Schulstufe	12	15	27
8. Schulstufe	8	12	20
Gesamt		34	56

In einem ersten Schritt wurde analysiert, welche Strategien die Lernenden überhaupt verwenden und ob sie fähig sind, ihre Vorgehensweise explizit zu nennen, um die Größenvergleichsaufgaben zu lösen. Die Ergebnisse zeigen hier, dass die identifizierten Strategien sich einerseits mit den aus der Literatur abgeleiteten Strategien decken, die Schüler:innen jedoch auch noch weitere Strategien angewandt haben. Mittels Qualitativer Inhaltsanalyse wurden daher die verwendeten Strategien genauer untersucht, um den Lösungswegen von Lernenden auf den Grund gehen zu können. Das Kategoriensystem wurde bereits weiter oben beschrieben. Für die Analyse ist es wichtig hervorzuheben, dass auch Items in der Pilotversion des Diagnoseinstrument vorgekommen sind, die Zahlen in der gleichen Darstellungsform präsentierten (Gruppe 1), zum Beispiel Brüche mit dem gleichen Nenner. Diese Items wurden im Diagnoseinstrument aufgenommen, um in späterer Folge einerseits für ein grundlegendes Bruchverständnis kontrollieren zu können und andererseits den Einsatz bestimmter Strategien zu evaluieren. Daher wurde nicht jeder Item-Cluster in diese Analyse mit einbezogen. Der Item-Cluster, in dem die Items nach einem Vergleich einer Dezimalzahl mit einer anderen Dezimalzahl fragten, wurde von dieser Analyse ausgeschlossen. Die am häufigsten verwendete Strategie war der Darstellungswechsel (siehe Tabelle 2). Hierbei wurden zuerst alle vorgegebenen Items betrachtet. Nach Ausschluss der Items, die bereits in der gleichen Darstellungsform gegeben waren – also zum Beispiel ein Bruch als Zahl geschrieben, also nicht als Bild oder Text dargestellt, mit einem weiteren Bruch als Zahl - stieg diese Häufigkeit sogar von 31,9% auf 42%. Dies zeigt, dass ein sehr großer Anteil der Teilnehmenden einen Darstellungswechsel benutzt, um Aufgaben dieser Art zu lösen. Es weist also darauf hin, dass Personen über Zahlen in unterschiedlichen Darstellungsformen eher schwierig Größenvergleiche anstellen. An dieser Stelle muss jedoch auch klar auf eine Limitation der Studie eingegangen werden: bei einer doch großen Anzahl von 15,16% der gestellten Fragen wurde keine Strategie oder Begründung angegeben. Diese Ergebnisse lassen vermuten, dass es den Lernenden schwer fällt ihre Vorgehensweisen und Begründungen zu beschreiben und verbalisieren. Ein weiterer Erklärungsgrund könnte die Motivation der Lernenden gewesen sein; da doch insgesamt 15 Begründungsfelder auszufüllen waren, kann es hier auch an fehlender Motivation und Bereitschaft gelegen haben die Fragen zu beantworten. Eine weitere sehr häufige Antwort (21%) war die, dass die Antwort einfach gewusst wurde. Hier kann ein möglicher Erklärungsansatz ebenfalls eine fehlende Reflexionsfähigkeit oder Kompetenz zur Verbalisierung des eigenen Handels sein. Auf der anderen Seite gibt es auch Faktenwissen im Bereich von Größenvergleichen. So sind gewisse Brüche wie ½ so im Faktenwissen der Menschen verankert, dass es bei einem Vergleich mit einer solchen Zahl keine großen Verarbeitungsschritte mehr benötigt. Die Strategie des Benchmarkings und eine grafische Lösung waren nach den bereits genannten die nächsthäufigen Strategien.

Tab. 2: Häufigkeiten der verwendeten Strategien

Strategie	f	%
Darstellungswechsel	402	31,9
Benchmarking	84	6,67
Gap Thinking	35	2,78
Residual Thinking	31	2,46
Grafisch	79	6,27
Wissen	266	21,11
Kreuzmultiplikation/Erweitern	35	2,78
Unsicherheit	60	4,76
Rule Thinking	44	3,49
Keine Antwort	191	15,16
Nennerverständnis	33	2,62
Gesamtanzahl der Antworten	1260	100

Zusätzlich wurde analysiert, ob das primen von Strategien (Gap Thinking, Residual Thinking, Benchmarking) auch dazu führt, dass Lernende die Strategien, für welche die Beispiele angelegt sind, auch erkennen und verwenden. Unter „priming“ versteht man eine Form der Lenkung oder Beeinflussung des Denkens mit vorangestellten Reizen. So soll durch die gewählten Zahlen, die im Beispiel gegeben werden, eine gewisse Strategie unbewusst hervorgerufen werden (Werth & Mayer 2008, S.29). Dafür wurden die Cluster für Benchmarking und Residual Thinking jeweils mit einem anderen Cluster verglichen, der eine bestimmte Strategie nicht begünstigen sollte. Als Vergleichscluster wurde immer derjenige mit dem höchsten Vorkommen der zu vergleichenden Strategie ausgewählt.

Beim Benchmarking-Vergleich zeigte ein $\mathcal{X}^2$-Test eine signifikant höhere Nutzung der Strategie im geprimten Cluster ($\mathcal{X}^2(1)$ =11,68, $p < 0.01$). Für die Strategie des Residual Thinkings zeigten die Ergebnisse eines $\mathcal{X}^2$-Tests ebenfalls ein signifikant höheres Auftreten der Strategie im geprimten Cluster ($\mathcal{X}^2(1)$ = 6,47, $p = 0.01$). Für die Strategie Gap Thinking war eine solche Analyse nicht möglich, da die Antworten der Teilnehmer:innen zu den geprimten Clustern keine eindeutige Kategorisierung zuließen. Die Antworten und Skizzen der Schüler:innen deuteten auf eine mögliche Anwendung der Strategie des Gap-Thinking hin. Bei dieser Kategorie bleibt jedoch noch viel Interpretationsspielraum offen. Daher steht die Annahme, dass Schüler diese Strategie häufiger anwenden, aber nicht richtig artikulieren konnten. Insgesamt lässt sich also vermuten, dass Schüler:innen zu einem Großteil erkennen können, wenn eine gewisse Strategie am zielführendsten ist beziehungsweise ein Beispiel oder eine Situation danach verlangt und dann auch diese einsetzen.

4 Implikationen für den Unterricht

Die Ergebnisse bieten also Einblick in die verwendeten und zielführenden Strategien. Die Antworten der Lernenden erlauben nicht nur Schlüsse für allgemeine Implikationen, sondern stehen auch stellvertretenden für Unterrichtssituationen, wie sie Lehrpersonen tagtäglich unterkommen.

Vorab muss hervorgehoben werden, dass ein Gelingensfaktor für die korrekte Bearbeitung der Aufgaben das Wissen von Schüler:innen über die oben beschriebenen Strategien ist. Das heißt, sie müssen bekannt mit den betreffenden Strategien sein, um diese auch anwenden zu können. Dies kann aus zwei Blickwinkel betrachtet werden. Einerseits kann die Lehrperson gezielt auf erfolgreiche Strategien hinweisen und die Verwendung dieser fördern. So können Schüler*innen lernen die richtige Strategie in der richtigen Situation zu verwenden beziehungsweise weniger zielführende Wege nicht zu beschreiten. Man ermöglicht Lernenden in unterschiedlichen Lern- und Alltagssituationen auf die richtigen Strategien zurückzugreifen. Auf der anderen Seite hilft das Erkennen der gewählten Lösungsstrategie den Lehrpersonen aber auch fehlendes Verständnis zu identifizieren. Man hat also einerseits den Blick auf die Thematisierung der Strategien im Unterricht in geeigneten Lernsettings und anderseits auf die Schwierigkeiten von Lernenden, um sie gezielt fördern zu können. Da die Antworten der Teilnehmenden, wie oben erwähnt, auch für Situationen stehen, die Lehrpersonen im Unterricht erleben, soll hier auf ein paar Schülerantworten exemplarisch eingegangen werden.

4.1 Beispiel zu den Strategien

Strategie des grafischen Lösens

Wir wissen, dass grafische Darstellungen gerade beim Aufbau des Zahlenverständnisses eine wichtige Rolle einnehmen. Weiters ist jedoch auch bekannt, dass dies nur für gewisse Aspekte des Unterrichts zielführend ist. So kann zum Beispiel ein grundlegendes Bruchzahlverständis mit grafischen Darstellungen gefördert werden, beim Operieren mit Brüchen ist ein grafischer Lösungsweg dann oft nicht mehr hilfreich oder unzureichend beziehungsweise sehr fehleranfällig (Padberg & Wartha 2017; Wartha & Schulz 2012; Heckmann 2011). Außerdem ist die Größe des Nenners der darzustellenden Zahl ebenfalls ausschlaggebend, ob diese Strategie sinnvoll ist oder nicht. So sieht man in Abbildung 5 gut, wie sich der beziehungsweise die Lernende bei dieser Aufgabe erfolgreich einer Skizze bedient hat. Da es sich hier einmal um Sechstel und Fünftel und ein zweites Mal um Drittel und Viertel handelt, ist eine grafische Darstellung der Zahlen sehr einfach möglich. Die Anteile können schnell und gut in eine Skizze eingezeichnet werden und die Schlussfolgerung – also welche Zahl größer ist - lässt sich ebenfalls klar und deutlich ablesen. Für einen gewissen Zahlenbereich ist es also eine sehr hilfreiche Strategie.

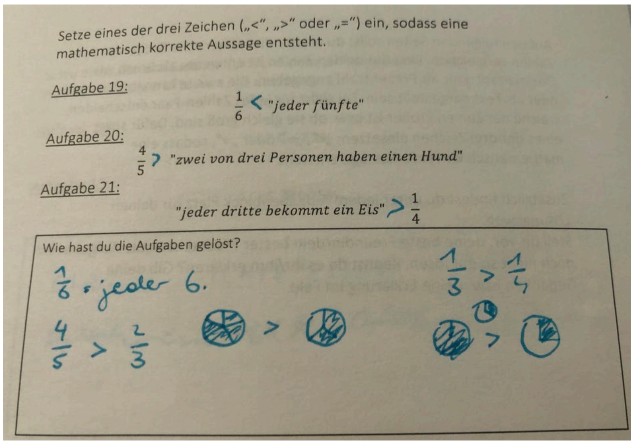

Abb. 5: Beispiel einer Schülerantwort für eine erfolgreiche grafische Lösung.

Wird der Bruch jedoch feiner unterteilt, so kommen Lernende sehr schnell an die Grenzen Ihrer Handskizzen, wie man in Abbildung 6a sehen kann. Die Angabe der Aufgabe 5, die in der Abbildung nicht mehr zu sehen ist, war es die beiden Brüche $\frac{17}{18}$ und $\frac{18}{19}$ zu vergleichen. Der oder die Lernende hat es hier ebenfalls mit einem gezeichneten Lösungsweg versucht, man kann jedoch gut erkennen (Abbildung 6a), dass es hier händisch kaum noch möglich ist. Der Aspekt der „schnellen“ Hilfestellung fällt also weg und wandelt sich sogar in eine fehleranfällige Strategie. Dieses Phänomen tritt jedoch nicht nur bei Kreisdarstellungen auf, sondern auch bei Rechtecken. Rechtecksdarstellungen können eine sehr hilfereiche Form der Abbildung sogar bis in den operativen Bereich sein, jedoch hat auch diese Art der Darstellung ihre Grenzen in der steigenden Größe des Nenners (siehe Abbildung 6b). Zusätzlich kann in Abbildung 6b erkannt werden, dass hier der oder die Lernende noch nicht erfasst hat, dass die Unterteilungen, die $\frac{1}{17}$ und ein $\frac{1}{15}$ darstellen, unterschiedlich groß gezeichnet werden müssten, um vergleichbar zu sein. Die beiden Ganzen müssten gleich groß/lange gezeichnet werden, um die Anteile korrekt vergleichen zu können.

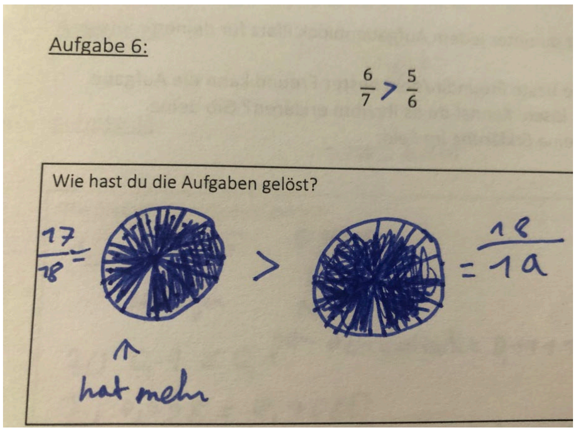

Abb. 6a: Schülerantwort mit nicht erfolgreicher grafischer Lösungsstrategie.

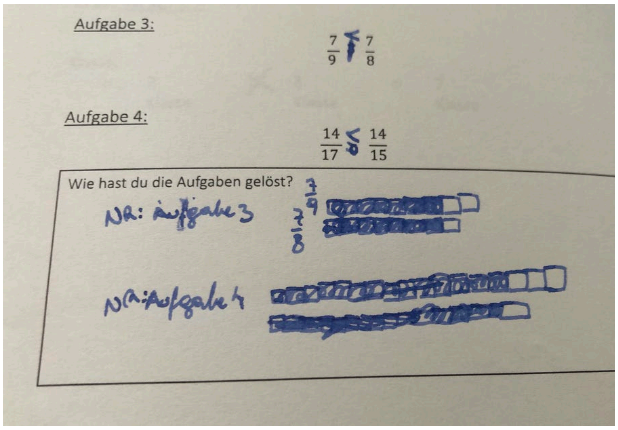

Abb. 6b: Schülerantwort mit Verwendung der Rechtecksdarstellung.

Strategie des Benchmarkings

Die Strategie des Benchmarkings ist eine sehr hilfreiche und ganz besonders schnelle Methode eine Entscheidung über den Größenvergleich zweier Zahlen zu geben. Natürlich kann man damit nicht immer den numerischen Wert einer Zahl sofort erkennen, für eine „größer-kleiner“-Entscheidung ist dies aber auch nicht unbedingt notwendig. In der Abbildung 7a und 7b kann man gut erkennen, wie mit der Benchmark $\frac{1}{2}$ gearbeitet wurde. Hier ist auch in der Begründung schön erkennbar, dass der oder dem Lernenden bewusst ist, welche Strategie hier angewandt wurde. Für den Unterricht ist es hier besonders wichtig, dass Schüler:innen das Kürzen von Brüchen wirklich gut beherrschen beziehungsweise sehr schnell erkennen können, welchen Bruch man einfach und schnell in eine Benchmark kürzen kann. Zusätzlich wird im regulären Unterricht beim Vergleich von Brüchen meist mehr Wert auf das Operieren an sich gelegt und nicht auf schnelle Strategien. Diese sind jedoch gerade für den Alltag ein unumgängliches Werkzeug.

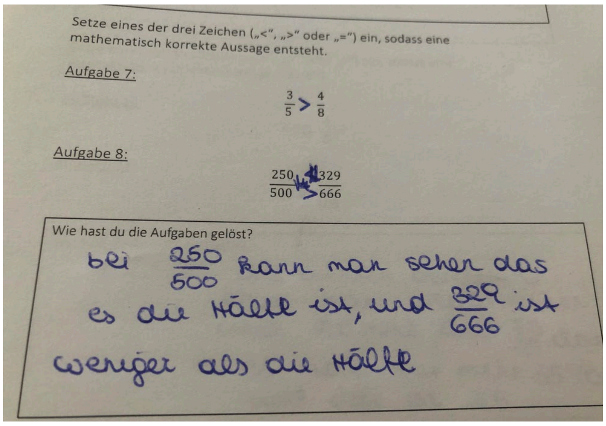

Abb. 7a: Begründung in Worten unter Anwendung der Strategie des Benchmarkings.

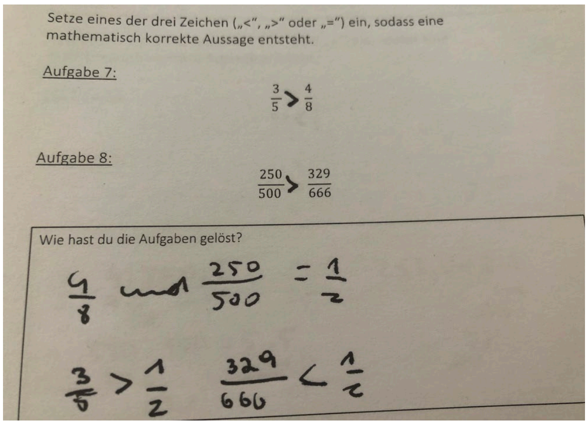

Abb. 7b: Beispiel einer Schülerantwort mit Anwendung der Strategie Benchmarkings.

Strategie des Residual Thinking

Bei der Strategie des *Residual Thinking* liegt das Augenmerk auf die noch fehlenden Anteile. Wie oben beschrieben ist diese Strategie zwar sehr hilfreich, jedoch birgt sie eine große Herausforderung: Da man ja die Anteile, die noch fehlen, vergleicht und nicht die, die vorhanden sind, muss ein Umkehrschluss gezogen werden. So schaffen es viele Lernende zu erkennen, wieviel fehlt, ziehen daraus dann aber falsche Schlüsse. Dies kann einerseits daran liegen, dass dann einfach ein Größenvergleich der fehlenden Anteile durchgeführt wird, anstatt der gegebenen Anteile, oder aber (wie in Abbildung 8 gezeigt wird) ein völlig falscher Schluss auf ein fehlendes Grundverständnis hinweisen kann.

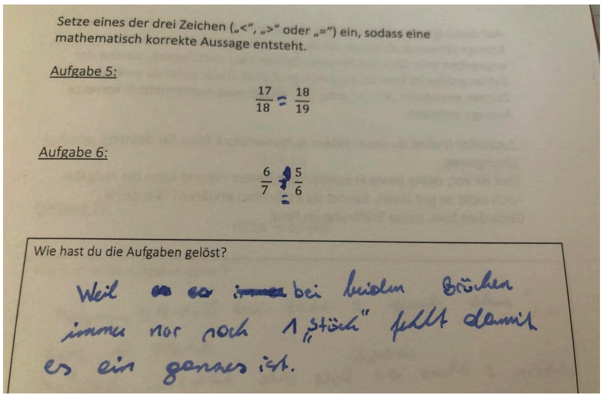

Abb. 8: Beispiel einer Schülerantwort mit Anwendung der Strategie Residual Thinking.

Es ist also für den Unterricht auf alle Fälle sinnvoll alle unterschiedlichen Strategien und Zugänge zu thematisieren, hier muss jedoch aufgepasst werden, dass es aber die Leistungsfähigkeit der Lernenden nicht übersteigt und dadurch zu viele fehlerhafte Arbeitsschritte beinhaltet.

Strategie des Darstellungswechsels

Insgesamt haben die Lernenden sehr oft die Darstellung selbstständig gewechselt, um eine Aufgabe zu bearbeiten (Abbildung 9a). Dies ist zum Teil sogar so erfolgt, dass beide gegebenen Zahlen in neue Darstellungsformen oder Schreibweisen gebracht werden, kann man sehr gut in der Antwort in Abbildung 9b erkennen. Es gilt also im Unterricht die Präferenz für eine Darstellungsform von Lernenden zu thematisieren und eventuell zu identifizieren. Oft nehmen Lernende Umwege beim Umwandeln in Kauf um in eine spezielle, von ihnen präferierte Darstellungsform zu kommen. Dieser Vorgang kann fehlerbehafteter sein als ein direkterer Weg.

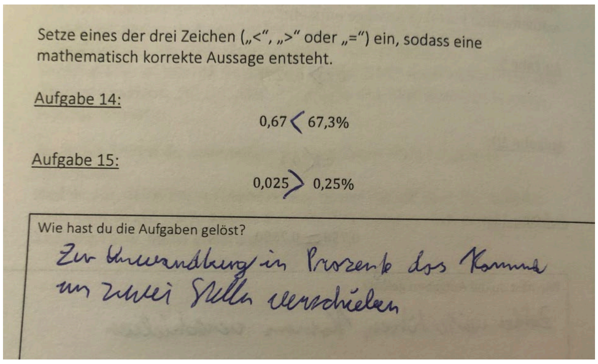

Abb. 9a: Schülerantwort bei der die Prozentdarstellung in eine Dezimaldarstellung gebracht wurde.

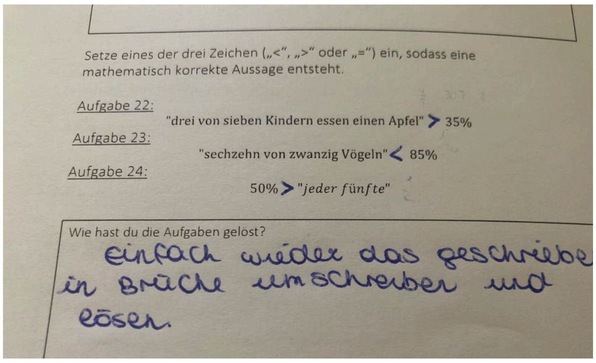

Abb. 9b: Schülerantwort, bei der erkennbar ist, dass jeweils beide Zahlen in die Bruchdarstellung gebracht wurden.

4.2 Schulbücher

Nun stellt sich als Lehrperson auch noch die Frage, inwiefern Schulbücher hier unterstützend eingesetzt werden können. Wenn auch nicht direkt ausgewiesen, so findet man doch immer wieder Aufgaben, die die Anwendung oben beschriebener Strategien fördern können.

Übungen, die das Zahlenverständnis fördern sollten und damit die Strategie des Benchmarkings mittrainieren sind immer wieder in Schulbüchern zu finden. So gibt es immer wieder Aufgaben der Form: „Schätzen der Größe von Brüchen. Gib jeweils an, ob die Zahl größer oder kleiner als $\frac{1}{2}$ ist" (Breunig et al. 2013, exemplarisch gewähltes Schulbuch). Bei solchen Aufgaben kann auch klar der Mehrwert dieser Strategie für Größenvergleichsaufgaben thematisiert werden; man kann, ohne den Wert der Zahl verarbeiten zu müssen, eine schnelle und korrekte Entscheidung treffen. Zusätzlich wird in vielen Schulbüchern auch sehr viel Wert daraufgelegt, die unterschiedlichen Darstellungsformen zu vernetzen und zwischen ihnen zu wechseln. So gibt es zum Beispiel Aufgaben, bei denen Streifendiagramme abzulesen sind und die Ergebnisse in Prozent und als Anteil des Ganzen anzugeben sind. (Salzger et al. 2015) Weiters bietet der Darstellungswechsel gute Möglichkeiten spielerisch im Unterricht tätig zu werden, da Spiele wie „Stille – Post" (Barzel et al. 2007) oder eine Variante eines Memory-Spiels, bei dem Zahlen in unterschiedlichen Repräsentationsformen mit dem gleichen Wert gefunden und gepaart werden müssen, dieses Konzept gut integrieren lassen.

4.3 Fördermaterialien

Außerdem gibt es bereits evidenzbasiertes Fördermaterial in diesem Bereich, dass auch die Möglichkeit zusätzlicher Diagnose bietet. So kann hier auf alle Fälle das Projekt „Mathe sicher können“ genannt werden. „Mathe sicher können“ bietet Diagnose- und Fördermaterial zu drei Inhaltsbereichen, wobei der hier relevante Bereich „Brüche, Prozente, Dezimalzahlen“ ist. Das Ziel des Projekts ist es, besonders schwächeren Schüler:innen, aber insgesamt allen Lernenden mathematische Erkenntnisse zu ermöglichen (Prediger et al. 2014). Die Materialen sind online teilweise frei zugänglich und mit didaktischen Kommentaren für den besseren Einsatz versehen. Im bereits erwähnten Inhaltsbereich werden fünf Schwerpunkte gesetzt: Bruchverständnis, Rechnen mit Brüchen, Dezimalverständnis, Rechnen mit Dezimalzahlen und Dezimalzahlen und Brüche. Es bietet sich für Lehrpersonen also nach dem Einsatz des Diagnoseinstruments die Möglichkeit, hier auf bereits vorhandene Fördermaterialen zurückgreifen zu können.

Weiters gibt es das Project BASICS-Mathematik (Roder 2019, Bruder et al. 2014), das sich auf die Diagnose und Förderung von mathematischem Grundwissen im Übergang von der Sek I auf die Sek II fokussiert. Auch hier gibt es die Möglichkeit online auf Fördermaterialien zuzugreifen und somit Schüler:innen gezielt fördern zu können. Angeboten werden hier die Themenbereiche Funktionen und Algebra. Gerade mit dem Fördermaterial zum Thema Algebra bietet sich eine gute Möglichkeit Lernenden schnell Übungen zu Verfügung zu stellen. Zusätzlich werden auch Lösungen bereitgestellt. Außerdem wird hier an einer Basics2go-App gearbeitet, um Übungen noch einfacher an die Lernenden bringen zu können.

5 Zusammenfassung

Das Ziel der Pilotstudie war es, neben der Evaluierung des Diagnoseinstruments (siehe hierfür Imp & Schubatzky, 2020), erste Einblicke und Erkenntnisse über die verwendeten Lösungsstrategien zu bekommen. Zusätzlich diente die Papier-Bleistift-Variante des Diagnosetools auch zur Generierung von Antwortkategorien für die digitale Endversion. Die Ergebnisse der Pilotierung zeigen, dass Lernende die in der Literatur beschriebenen Strategien tatsächlich anwendeten, aber auch einige zusätzliche, die nicht vorab abgeleitet wurden. Gerade die Strategie *Benchmarking* wurde häufig bei den dafür vorgesehenen Items angewandt und gilt als sehr hilfreiche und schnell anzuwendende Strategie. Hier sollte auch im Unterricht ein Augenmerk daraufgelegt werden. Die Teilnehmer:innen verwendeten viele verschiedene Strategien (insgesamt zehn plus „keine Antwort“). Bei fast der Hälfte aller Antworten (42%) wurde in Itemclustern, die nicht die gleiche Darstellungsform oder Modalität hatten, die Strategie gewählt, die Darstellungsform zu ändern. Im nächsten Zyklus, in der Hauptstudie, soll dieser Aspekt noch einmal tiefergehend analysiert werden, indem die Kategorie Darstellungswechsel auch in Unterkategorien unterteilt werden. Dies wurde bereits für die digitale Version umgesetzt, die derzeit in der Evaluierung steht. So soll es in Zukunft möglich sein beispielsweise zu analysieren, welche Darstellungsänderung (z. B. in Dezimalzahlen, Brüche, grafisch) erfolgreicher ist als andere. Beim Darstellungswechsel ist es zusätzlich spannend zu untersuchen, ob Lernende beide gegebenen Zahlen in eine andere, dritte, Darstellungsform bringen. Dies könnte erfolgen, da sie in die Darstellung wechseln wollen, die ihnen am besten liegt zu wechseln. Zum Beispiel könnte hier jemand eine Zahl in Prozentschreibweise und eine als Bild gegebene Zahl in Dezimalschreibweise umwandeln. Darüber hinaus konnten viele Lernende ihre Antwort nicht begründen oder gaben nur die Antwort, dass sie die richtige Lösung „einfach gewusst“ haben. Dies weist auf den Bedarf einer Förderung der mathematischen Kommunikations- und Reflexionsfähigkeit hin und ist ein Punkt für den ebenfalls Fördermaterialien eingesetzt werden sollten, da sie ihre Antworten nicht immer ausreichend begründen konnten. Dieser Problematik wird jedoch auch in der digitalen Version des Diagnoseinstruments zum Teil entgegengewirkt, indem die Strategien nur mehr zum Auswählen sind. Die genauere Analyse der Kommunikations- und Reflexionsfähigkeit der Lernenden, sowie die Bereitstellung von Fördermaterial würde jedoch den Rahmen dieses Forschungsprojektes sprengen. Sie stellt auch nur eine Erklärungsmöglichkeit für diese Antwortkategorie dar. Eine Limitation des Diagnoseinstruments bleibt die fehlende direkte Kommunikation mit den Lernenden.

Die Ergebnisse der Pilotierung liefern wichtige Erkenntnisse für die Entwicklung der digitalen Version des Diagnosetools. Zusätzlich konnten interessante Implikationen für den Unterricht abgeleitet werden. So ist bereits das Wissen über Strategien hilfreich und kann somit die Lehrperson sowie die Lernenden dazu befähigen Anwendungssituationen und passende Strategien schneller zu erkennen. Werden Schüler:innen auf unterschiedlich sinnvolle Strategien hingewiesen, zum Beispiel grafische Lösungsverfahren bei Aufgaben mit Bruchzahlen mit kleinen Nennern, so können schnellere und korrekte Ergebnisse erzielt werden. Zusätzlich ist wichtig im Unterricht zu thematisieren, welche Strategien in welcher Situation nicht sinnvoll sind. Eine Kombination des Diagnosetools mit bereits vorhandenen Fördermaterialien kann eine hilfreiche Ergänzung im Unterricht darstellen und Lehrpersonen darin unterstützen die Lernenden gezielt zu fördern. Hierbei werden „Mathe sicher können" sowie „BASICS-Mathematik" exemplarisch empfohlen. Mit diesen wissenschaftlich fundierten Materialien kann im Unterricht auch eine niederschwellige Förderung erfolgen. Außerdem finden sich in gängigen Schulbüchern diverse Aufgabentypen, die ebenfalls auf die Schulung unterschiedliche Strategien abzielen. Das digitale Diagnoseinstrument, das sich gerade in der Evaluierungsphase befindet, soll in Zukunft unkompliziert im Unterricht eingesetzt und durch Fördermaterial ergänzt werden können. Damit soll es einen Beitrag zur Verbesserung eines elementaren Zahlenverständnisses von Zahlen in unterschiedlichen Repräsentationsformen leisten.

Literatur

Barzel, B.; Büchter, A. & Leuders, T. (2007): *Mathematik-Methodik. Handbuch für die Sekundarstufe I und II*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

BMBWF. (2000). Lehrplan der AHS-Unterstufe, BMBWF. Online: https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568 (Zugriff: 19.04.2021)

Bruder, R.; Reibold, J. & Weise, T. (2014). *MABIKOM-Mathematische binnendifferenzierende Kompetenzentwicklung im Mathematikunterricht*. Braunschweig: Schroedel *(MABIKOM)*

Breunig, E.; Fitzka, E.; Lewisch, I.; Riehs, B. & Zwicker, T. (2013). *Mathematik. Verstehen + Üben + Anwenden 2*. Linz: VERITAS Schulbuch Verlags- und Handelsges.mbH & Co. OG.

Clarke, D. M. & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. In: *Educational Studies in Mathematics*, *72* (1), 127–138. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9198-9

Cramer, E. & Walcher, S. (2010). Schulmathematik und Studierfähigkeit. In: *Mdmv*, 18, 110–114.

De Smedt, B.; Noël, M. P.; Gilmore, C. & Ansari, D. (2013). How do symbolic and non-symbolic numerical magnitude processing skills relate to individual differences in children's mathematical skills? A review of evidence from brain and behavior. In: *Trends in Neuroscience and Education*, *2* (2), 48–55. https://doi.org/10.1016/j.tine.2013.06.001

Dehaene, S. (2011). *The number sense. How the mind creates mathematics.* 2. Aufl. New York: Oxford University Press. https://doi.org/10.2307/2589308

Dehaene, S.; Piazza, M.; Pinel, P. & Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. In: *Cognitive Neuropsychology*, *20* (3–6), 487–506. https://doi.org/10.1080/02643290244000239

Geller, E. H.; Son, J. Y. & Stigler, J. W. (2017). Conceptual explanations and understanding fraction comparisons. In: *Learning and Instruction*, *52*, 122–129. doi: 10.1016/j.learninstruc.2017.05.006.

Heckmann, K. (2011). Von Zehnern zu Zehntel. Das Stellenwertverständnis auf Dezimalbrüche erweitern. In: *Mathematik lehren*, (3), 55-62.

Henn, G. & Polaczek, C. (2007). Studienerfolg in den Ingenieurwissenschaften. In: *Das Hochschulwesen* 55 (5), 144–147.

Holloway, I. D. & Ansari, D. (2009). Mapping numerical magnitudes onto symbols: The numerical distance effect and individual differences in children's mathematics achievement. In: *Journal of Experimental Child Psychology*, *103* (1), 17–29. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2008.04.001

Imp, C. & Schubatzky, T. (2020). Entwicklung eines Diagnoseinstruments zur Erhebung eines Verständnisses von Zahlen in unterschiedlichen Darstellungen. In: Fridrich, Christian; Frühwirth, Gabriele; Potzmann, Renate; Greller, Wolfgang; Petz, Ruth; (Hrsg.): *Forschungsperspektiven 12*. Wien: LIT Verlag. 27 - 51.

Lyons, I. M.; Price, G. R.; Vaessen, A.; Blomert, L. & Ansari, D. (2014). Numerical predictors of arithmetic success in grades 1-6. In: *Developmental Science*, *17* (5), 714–726. https://doi.org/10.1111/desc.12152

Mayring, P. (2010). Qualitative Inhaltsanalyse. In: *Handbuch qualitative Forschung in der Psychologie.* Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften. 601-613.

Nosworthy, N.; Bugden, S.; Archibald, L.; Evans, B. & Ansari, D. (2013). A Two-Minute Paper-and-Pencil Test of Symbolic and Nonsymbolic Numerical Magnitude Processing Explains Variability in Primary School Children's Arithmetic Competence. In: *PLoS ONE*, *8* (7). https://doi.org/10.1371/journal.pone.0067918

Padberg, F. & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung*. Springer Spektrum, Berlin: Heidelberg.

Pearn, C. & Stephens, M. (2004). Why do you have to probe to discover what Year 8 students really think about fractions. In: *Mathematics Education for the Third Millennium. Towards 2010. Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.* 430–437.

Piaget, J. (1952). *The Child's Conception of Number*. New York: Norton.

Post, T., Lappan, G., & Cramer, K. (1987). Research into practice: Children's strategies in ordering rational numbers. In: *The Arithmetic Teacher*, 35 (2), 33-35.

Prediger, S.; Selter, C.; Hußmann, S. & Nührenbörger, M. (2014). *Mathe sicher können. Diagnose-und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen*, *1*. Online: https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de. (Zugriff: 26.08.2021).

Roder, U. (2019). *Ein Förderkonzept zu mathematischem Grundwissen und Grundkönnen am Übergang in die Sekundarstufe II: Theoriebasierte Entwicklung, exemplarische Umsetzung und Ersterprobung der Lernumgebung BASICS-Mathematik*. Wiesbaden: Springer-Verlag.

Salzger, B.; Bachmann, J.; Germ, A.; Riedler B.; Singer, K. & Ulovec, A. (2015). *Mathematik verstehen 2*. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.

Schott, D.; Schramm, T. & Strauss, R. (2007). Positionen zur Mathematikausbildung von Ingenieuren. In I. Lehmann (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007*. Hildesheim: Franzbecker. 545-548.

Schwenk, A. & Berger, M. (2006). Zwischen Wunsch und Wirklichkeit: Was können unsere Studienanfänger. In: *Die neue Hochschule*, 36-40.

Siegler, R. S. & Ramani, G. B. (2009). Playing linear number board games—but not circular ones—improves low-income preschoolers' numerical understanding. In: *Journal of Educational Psychology*, *10 1*(3), 545–560. https://doi.org/10.1037/a0014239

Vogel, S. E.; Goffin, C. & Ansari, D. (2015). Developmental specialization of the left parietal cortex for the semantic representation of Arabic numerals: An fMR-Adaptaton study. In: *Developmental Cognitive Neuroscience*, *12* (2015), 61–73. https://doi.org/10.1016/j.dcn.2014.12.001

Wartha, S. (2007). *Längsschnittliche Untersuchungen zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs*. Hildesheim: Franzbecker

Wartha, S. & Schulz, A. (2012). *Rechenproblemen vorbeugen: Grundvorstellungen aufbauen: Zahlen und Rechnen bis 10.*, Berlin: Cornelsen.

Werth, L. & Mayer, J. (2008). *Sozialpsychologie*. Berlin Heidelberg: Spektrum.

Wu, H.-H. (2003). *Fractions (Draft).* Online: https://math.berkeley.edu/~wu/EMI2a.pdf (Zugriff: 25.10.2021)

Wu, H.-H. (2016). *Teaching School Mathematics: Pre-Algebra.* Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.

Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. In: *Nature*, *358* (6389), 749–750.

Verfasserin

Christina Imp
Pädagogische Hochschule Steiermark
Institut für Sekundarstufe Allgemeinbildung
Hasnerplatz 12

8010 Graz
christina.imp@phst.at

Die Autorin möchte sich an dieser Stelle herzlich für die kritische, umsichtige und ausführliche Diskussion des Artikels bei Prof. Pauer bedanken.